

Тема: Расчет количества возможных вариантов (комбинаторика)

Что нужно знать:

- если на каждом шаге известно количество возможных вариантов выбора, то для вычисления общего количества вариантов нужно все эти числа **перемножить**;
например, в двузначном числе мы можем выбрать первую цифру 9 способами (она не может быть нулем), а вторую – 10 способами, поэтому всего есть $9 \cdot 10 = 90$ двузначных чисел
- если мы разбили все нужные нам комбинации на несколько групп (*не имеющих общих элементов!*) и подсчитали количество вариантов в каждой группе, то для вычисления общего количества вариантов нужно все эти числа **сложить**;
например, есть $9 \cdot 10 = 90$ трехзначных чисел, оканчивающихся на 5, и $9 \cdot 10 = 90$ трехзначных чисел, оканчивающихся на 2, поэтому $90 + 90 = 180$ трехзначных чисел оканчиваются на 2 или на 5
- если в предыдущем случае группы имеют общие элементы, их количество нужно **вычесть** из полученной суммы;
например, есть $9 \cdot 10 = 90$ трехзначных чисел, оканчивающихся на 5, и $10 \cdot 10 = 100$ трехзначных чисел, начинающихся на 5; в обе группы входят числа, которые начинаются и заканчиваются на 5, их всего 10 штук, поэтому количество чисел, которые начинаются *или* заканчиваются на 5, равно $90 + 100 - 10 = 180$.

Что не мешает знать:

- если есть **n** различных элементов, число их различных перестановок равно факториалу числа **n**, то есть произведению всех натуральных чисел от 1 до **n**:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$$

например, три объекта (А, Б и В) можно переставить 6 способами ($3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$):

(А, Б, В), (А, В, Б), (Б, А, В), (Б, В, А), (В, А, Б) и (В, Б, А)

- если нужно выбрать **m** элементов из **n** (где $n \geq m$) и две комбинации, состоящие из одних и тех же элементов, расположенных в разном порядке, считаются различными, число таких комбинаций (они называются *размещениями*) равно

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = (n-m+1) \cdot (n-m+2) \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$$

например, в соревновании пяти спортсменов призовые места (первые три) могут распределиться 60 способами, поскольку

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$$

- если нужно выбрать **m** элементов из **n** (где $n \geq m$) и порядок их расположения не играет роли, число таких комбинаций (они называются *сочетаниями*) равно

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

например, выбрать двух дежурных из пяти человек можно 10 способами, поскольку

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{120}{2 \cdot 6} = 10.$$

Пример задания:

Сколько существует различных четырехзначных чисел, в записи которых используются только четные цифры?

1) 125

2) 250

3) 500

4) 625

Решение:

- 1) первой цифрой может быть любая четная цифра, кроме нуля (иначе число не будет четырехзначным) – это 2, 4, 6 или 8, всего 4 варианта

x	?	?	?
---	---	---	---

Вариантов 4

- 2) предположим, что первая цифра выбрана; независимо от нее на втором месте может стоять любая из четных цифр – 0, 2, 4, 6 или 8, всего 5 вариантов:

x	y	?	?
---	---	---	---

Вариантов 4 5

- 3) аналогично находим, что последние две цифры также могут быть выбраны 5-ю способами каждая, независимо друг от друга и от других цифр (первой и второй):

x	y	z	w
---	---	---	---

Вариантов 4 5 5 5

- 4) общее количество комбинаций равно произведению

$$4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 500$$

- 5) таким образом, правильный ответ – 3.

Возможные ловушки и проблемы:

- легко забыть, что первая цифра не может быть нулем, при этом мы получим неверный ответ 625 (ответ 4)

Еще пример задания:

Сколько существует четырехзначных чисел, в записи которых все цифры различны?

1) 3528

2) 4536

3) 5040

4) 9000

Решение:

- 1) первой цифрой может быть любая цифра, кроме нуля (иначе число не будет четырехзначным), всего 9 вариантов

x	?	?	?
---	---	---	---

Вариантов 9

- 2) предположим, что первая цифра x выбрана; на втором месте может стоять любая цифра y, кроме x, всего 9 вариантов (ноль тоже может быть!):

x	y	?	?
---	---	---	---

Вариантов 9 9

- 3) третья цифра z может быть любой, кроме тех двух, которые уже стоят на первых двух местах, всего 8 вариантов:

x	y	z	?
---	---	---	---

Вариантов 9 9 8

- 4) наконец, четвертая цифра может быть любой из 7 оставшихся (не равных x, y и z)

x	y	z	w
---	---	---	---

Вариантов 9 9 8 7

- 5) общее количество комбинаций равно произведению

$$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$$

- 6) таким образом, правильный ответ – 2.

Возможные ловушки и проблемы:

- легко забыть, что первая цифра не может быть нулем, при этом мы получим неверный ответ $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ (ответ 3)
- нужно учитывать, что выбор каждой следующей цифры зависит от предыдущих, иначе мы получим неверный ответ $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$ (ответ 4)

Еще пример задания:

Сколько существует различных четырехзначных чисел, в записи которых ровно две девятки, стоящие рядом?

Решение:

- 1) возможны три случая: $99\bullet\bullet$, $\bullet 99\bullet$ и $\bullet\bullet 99$, где жирная точка обозначает некоторую цифру, не равную 9
- 2) для каждого из этих случаев нужно подсчитать количество вариантов и эти числа сложить
- 3) в варианте $99\bullet\bullet$ две последних цифры могут быть любыми, кроме девятки (по 9 вариантов выбора):

	9	9	x	y
<i>Вариантов</i>	1	1	9	9

поэтому всего получаем $1 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 9 = 81$ вариант

- 4) в варианте $\bullet 99\bullet$ первая цифра не может быть нулем и девяткой (остается 8 вариантов), а последняя может быть любой, кроме девятки (9 вариантов):

	x	9	9	y
<i>Вариантов</i>	8	1	1	9

поэтому всего получаем $8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 9 = 72$ варианта

- 5) в варианте $\bullet\bullet 99$ первая цифра не может быть нулем и девяткой (остается 8 вариантов), а последняя может быть любой, кроме девятки (9 вариантов):

	x	x	9	9
<i>Вариантов</i>	8	9	1	1

поэтому всего получаем $8 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 1 = 72$ варианта

- 6) общее количество вариантов равно сумме

$$81 + 72 + 72 = 225$$

- 7) таким образом, правильный ответ – 2.

Возможные ловушки и проблемы:

- можно забыть, что первая цифра не может быть нулем, при этом мы получим неверный ответ $81+81+81=243$ (ответ 3)
- можно забыть, что числа x и y не могут быть равны 9, при этом мы получим неверный ответ $100+90+90=280$ (ответ 4)

Еще пример задания:

Сколько существует различных четырехзначных чисел, в записи которых не более двух различных цифр?

1) 446

2) 516

3) 576

4) 640

Решение:

- 1) обозначим первую цифру через x , она не может быть нулем, поэтому возможно 9 вариантов выбора

x	?	?	?
-----	---	---	---

Вариантов 9

- 2) другую цифру обозначим через y , ее тоже можно выбрать 9 способами (она может быть нулем, но не может быть равна x)
- 3) нужно отдельно рассмотреть три случая: $xу●●$, $хху●$ и $ххх●$; для каждого из этих случаев нужно подсчитать количество вариантов и эти числа сложить
- 4) в варианте $xу●●$ две последних цифры могут быть (независимо друг от друга) выбраны равными x или y (по 2 варианта выбора):

x	y	x или y	x или y
-----	-----	-------------	-------------

Вариантов 9 9 2 2

поэтому всего получаем $9 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 2 = 324$ варианта

- 5) в варианте $хху●$ последняя цифра может быть равна только x или y (2 варианта):

x	x	y	x или y
-----	-----	-----	-------------

Вариантов 9 1 9 2

поэтому всего получаем $9 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 2 = 162$ варианта

- 6) в варианте $ххх●$ последняя цифра может быть любой (10 вариантов):

x	x	x	x или y
-----	-----	-----	-------------

Вариантов 9 1 1 10

поэтому всего получаем $9 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 10 = 90$ вариантов

- 7) общее количество вариантов равно сумме

$$324 + 162 + 90 = 576$$

- 8) таким образом, правильный ответ – 3.

Возможные ловушки и проблемы:

- можно забыть, что первая цифра не может быть нулем, при этом мы получим неверный ответ $360 + 180 + 100 = 640$ (ответ 4)

Еще пример задания:

Сколько существует различных четырехзначных чисел, в записи которых все цифры нечетные и хотя бы одна из них равна 5?

1) 226

2) 369

3) 600

4) 625

Решение (вариант 1):

- 1) рассмотрим четыре варианта: $5●●●$, $●5●●$, $●●5●$ и $●●●5$; для каждого из этих случаев нужно подсчитать количество уникальных вариантов (исключив все общие!) и эти числа сложить
- 2) в случае $5●●●$ три последних цифры могут быть любыми нечетными (по 5 независимых вариантов выбора):

5	x	y	z
---	-----	-----	-----

Вариантов 1 5 5 5

поэтому всего получаем $1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ вариантов

- 3) с первого взгляда для случая $\bullet 5 \bullet \bullet$ ситуация та же самая, но это не так; дело в том, что часть этих вариантов (с пятеркой на первом месте) уже вошла в первую группу $5 \bullet \bullet \bullet$, поэтому второй раз их учитывать не нужно; это значит, что на первом месте может быть одна из 4-х цифр – 1, 3, 7 или 9:

x	5	y	z
---	---	---	---

Вариантов 4 1 5 5

всего получаем $4 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ вариантов

- 4) рассматривая случай $\bullet \bullet 5 \bullet$, нужно выкинуть все варианты, в которых пятерки стоят на первых двух местах

x	y	5	z
---	---	---	---

Вариантов 4 4 1 5

всего получаем $4 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 5 = 80$ вариантов

- 5) для $\bullet \bullet 5 \bullet$ аналогично получаем

x	y	z	5
---	---	---	---

Вариантов 4 4 4 1

всего получаем $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 1 = 64$ варианта

- 6) общее количество вариантов

$$125 + 100 + 80 + 64 = 369 \text{ вариантов}$$

- 7) таким образом, правильный ответ – 2.

Возможные ловушки и проблемы:

- можно забыть отбросить повторяющиеся варианты при рассмотрении групп $\bullet 5 \bullet \bullet$, $\bullet \bullet 5 \bullet$ и $\bullet \bullet \bullet 5$; при этом мы получим неверный ответ $125 + 125 + 125 + 125 = 600$ (ответ 3)

Решение (вариант 2):

- 1) все числа, состоящие только из нечетных цифр, можно разбить на две группы: те, в которых есть пятерка, и те, где ее нет
- 2) общее число чисел, состоящих только из нечетных цифр, находим аналогично первой рассмотренной задаче; учитывая, что среди них нет нуля, получаем $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ вариантов
- 3) теперь аналогично найдем количество чисел, состоящих только из цифр 1, 3, 7 и 9 (без пятерки); поскольку на каждом из 4-х мест может стоять одна из 4-х цифр, получаем $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$ вариантов
- 4) нужный нам результат – это разница $625 - 256 = 369$ вариантов
- 5) таким образом, правильный ответ – 2.

Еще пример задания:

Виктор хочет купить пять разных книг, но денег у него хватает только на три (любые) книги. Сколькими способами Виктор может выбрать три книги из пяти?

- 1) 10 2) 20 3) 30 4) 60

Решение (вариант 1):

- 1) будем рассуждать так: сначала Виктор выбирает одну (любую) книгу, затем – вторую (из оставшихся), затем – третью
- 2) у него есть 5 разных способов выбрать первую книгу, затем – 4 разных способа выбрать вторую книгу (поскольку та, что он выбрал сначала, уже нет смысла брать снова), и 3 способа выбрать третью книгу:

книга 1	книга 2	книга 3
---------	---------	---------

Вариантов 5 4 3

всего получаем $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ вариантов

- 3) проблема состоит в том, что среди этих 60 вариантов есть повторяющиеся: предположим, что книги имеют номера от 1 до 5, тогда наборы книг (1, 2, 3) и (3, 2, 1) – одинаковые (это разные *перестановки* чисел 1, 2 и 3)
- 4) подсчитаем число перестановок трех чисел; на первом месте может стоять любое из 3-х чисел (3 варианта), на втором месте – любое из двух оставшихся (2 варианта), на третьем месте – только одно оставшееся число:

	книга 1	книга 2	книга 3
<i>Вариантов</i>	3	2	1

всего получаем $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ вариантов

- 5) это означает, что каждое сочетание было подсчитано 6 раз в п. 2, поэтому различных *сочетаний* книг – в 6 раз меньше, то есть $60 / 6 = 10$
- 6) таким образом, правильный ответ – 1.

Возможные ловушки и проблемы:

- можно забыть, что среди сочетаний, подсчитанных в п. 2, есть одинаковые (неверный ответ 60)
- можно неверно подсчитать количество повторяющихся комбинаций, разделив 60 на количество выбранных книг (неверный ответ 20)

Решение (вариант 2, формулы комбинаторики):

- 1) нам нужно выбрать 3 объекта из 5, причем порядок выбора здесь не важен – нам нужны разные *сочетания*
- 2) зная формулу для вычисления количества *сочетаний*, сразу находим (при $m = 3$ и $n = 5$)

$$C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{120}{6 \cdot 2} = 10.$$

- 3) таким образом, правильный ответ – 1.

Возможные проблемы:

- нужно помнить формулы комбинаторики

Задачи для тренировки:

- 1) Сколько существует четырехзначных чисел, в которых есть ровно две восьмерки, не стоящие рядом?
1) 216 2) 224 3) 234 4) 243
- 2) Сколько существует четырехзначных чисел, составленных из разных четных цифр?
1) 96 2) 120 3) 500 4) 625
- 3) Сколько существует четырехзначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна четная цифра?
1) 3289 2) 4536 3) 8375 4) 9000
- 4) Сколько существует четырехзначных чисел, которые делятся на 5?
1) 900 2) 1000 3) 1800 4) 2000
- 5) Сколько существует четырехзначных чисел, не превышающих 3000, в которых ровно две цифры «3»?
1) 36 2) 54 3) 81 4) 162
- 6) В чемпионате по шахматам участвовало 40 спортсменов. Каждый с каждым сыграл по одной партии. Сколько всего партий было сыграно?
1) 780 2) 800 3) 1560 4) 1600
- 7) В вазе лежат яблоко, груша, персик и абрикос. Кате разрешили выбрать два каких-то фрукта. Сколько у Кати вариантов выбора?
1) 6 2) 12 3) 16 4) 24
- 8) У Паши есть 6 воздушных шариков разного цвета. Три из них он хочет подарить Маше. Сколькими способами он может это сделать?
1) 6 2) 12 3) 20 4) 60
- 9) Сколько существует четырехзначных чисел, которые читаются одинаково «слева направо» и «справа налево»?
1) 50 2) 90 3) 100 4) 120
- 10) Цепочка из трех бусин формируется по следующему правилу: На первом месте в цепочке стоит одна из бусин А, Б, В. На втором – одна из бусин Б, В, Г. На третьем месте – одна из бусин А, В, Г, не стоящая в цепочке на первом или втором месте. Сколько всего есть таких цепочек?
1) 9 2) 16 3) 21 4) 27